

Пермский край  
2025-2026 учебный год  
**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**  
**ПО МАТЕМАТИКЕ**  
**МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП**  
**10 КЛАСС**

1. Сравните два числа:  $1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$  и  $\sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ .

**Ответ.** Числа равны.

**Решение.** Поскольку  $5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ ,  $4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2$ , оба данных числа равны  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

**Замечание.** Более длинный путь к решению – возводить оба числа в квадрат, избавляясь от радикалов.

**Критерии оценки.** Если ход решения верный, то количество полученных баллов должно быть положительно, даже если получен неверный ответ. За технические ошибки баллы снимаются (до шести включительно).

2. Биолог поместил в аквариум амёбу; она начала делиться. Наблюдая за амёбами, биолог установил: (а) амёбы бывают двух цветов: рубиновые и изумрудные; (б) рубиновая амёба может разделиться либо на две рубиновые амёбы, либо на две изумрудные; (в) изумрудная амёба может разделиться только на рубиновую и изумрудную. В некоторый момент в аквариуме оказалось ровно 100 рубиновых и 100 изумрудных амёб. Амёбу какого цвета биолог поместил в аквариум?

**Ответ.** Рубиновую.

**Решение.** При каждом делении количество изумрудных амёб либо увеличивается на 2, либо не меняется. Следовательно, количество изумрудных амёб либо всегда чётно, либо всегда нечётно. Поскольку число 100 чётное, число изумрудных амёб было изначально чётным, то есть нулём.

**Критерии оценки.** Только ответ – 0 баллов. Разбор частных случаев не добавляет баллов. Замечено, что число изумрудных амёб всегда остаётся чётным – минимум 4 балла.

3. Курьер бежит вверх по лестнице. Чтобы преодолеть очередной промежуток между этажами, он тратит на 10% больше времени, чем на предыдущий промежуток между этажами. На бег с первого до пятого этажа он тратит 10 секунд. Уложится ли курьер в 25 секунд, поднимаясь с первого до девятого этажа?

**Ответ.** Уложится.

**Решение.** Пусть  $q = 11/10$ , а на бег с первого до второго этажа курьер тратит  $x$  секунд. Тогда на путь с первого до пятого этажа курьер тратит

$$A = x(1 + q + q^2 + q^3) = x \frac{1 - q^4}{1 - q} = 10 \text{ секунд,}$$

а на путь с первого до девятого этажа он тратит

$$B = x(1 + q + q^2 + \dots + q^7) = x \frac{1 - q^8}{1 - q} \text{ секунд.}$$

Следовательно,  $\frac{B}{A} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = 1+q^4 = 1+\left(\frac{11}{10}\right)^4 = 1+\frac{14641}{10000} < \frac{25}{10}$ , откуда  $B < 25$ .

**Замечание.** Формулу суммы геометрической прогрессии можно не применять, так как

$$B = x(1+q+q^2+\dots+q^7) = x(1+q+q^2+q^3)+x(1+q+q^2+q^3)q^4 = A(1+q^4).$$

**Критерии оценки.** Правильен только ответ – 0 баллов. Если ход решения верный, то количество полученных баллов должно быть положительно, даже если получен неверный ответ. За технические ошибки баллы снимаются (до шести включительно).

4. На сторонах квадрата  $ABCD$  отмечены точки  $P \in BC$  и  $Q \in CD$  такие, что  $PA$  – биссектриса угла  $BPQ$ . Найдите  $\angle PAQ$ .

**Ответ.**  $\angle PAQ = 45^\circ$ .

**Решение.** Опустим из точки  $A$  на прямую  $PQ$  перпендикуляр  $AH$ . Получаем:  $\triangle APB = \triangle APH$  (по гипотенузе и острому углу), следовательно,  $HA = BA$ . Значит,  $\triangle AHQ = \triangle ADQ$  (по гипотенузе и катету). Отсюда следует, что точка  $H$  лежит на отрезке  $PQ$ , а не на его продолжении (иначе отрезки  $QD$  и  $QH$  совпали бы). Таким образом,  $\angle DAQ = \angle QAH$ , и окончательно получаем:

$$\angle PAQ = \angle PAH + \angle HAQ = \frac{1}{2}(\angle BAN + \angle HAD) = \frac{1}{2}\angle BAD = 45^\circ.$$

**Критерии оценки.** Ответ без решения не оценивается.

5. Четырехзначное натуральное число  $N$  является квадратом числа  $n$ , а если между второй и третьей цифрами числа  $N$  поставить знак  $+$ , то полученная сумма двух двузначных чисел даст  $n$  (если второе двузначное число начинается нулем, то оно рассматривается как однозначное). Найдите все такие  $N$ .

**Ответ.** 2025, 3025, 9801.

**Решение.** Пусть  $A$  и  $B$  – числа, образованные первыми двумя и последними двумя цифрами числа  $N$ . Теперь условие задачи можно переписать в виде:  $100A + B = n^2$ ,  $A + B = n$ . Следовательно,  $99A = n^2 - n = n(n-1)$ . Так как числа  $n$  и  $n-1$  не могут одновременно делиться на 3, то либо  $n$ , либо  $n-1$  делится на 9. Так как число  $N$  четырехзначное, то  $32 \leq n \leq 99$ . Выпишем из этого интервала числа, делящиеся на 9, и составим две таблицы.

$n$	36	<b>45</b>	54	63	72	81	90	<b>99</b>
$n-1$	35	<b>44</b>	53	62	71	80	89	<b>98</b>

$n-1$	36	45	<b>54</b>	63	72	81	90	<b>99</b>
$n$	37	46	<b>55</b>	64	73	82	91	<b>100</b>

Нас интересуют столбцы, в которых произведение чисел делится на 99. Такие столбцы выделены жирным. Один из четырех выделенных столбцов не подходит, поскольку получается  $A=100$ . Остальные три выделенных столбца дают три ответа: 1)  $2025 = 45^2$ ,  $20+25=45$ ; 1)  $3025 = 55^2$ ,  $30+25=55$ ; 1)  $9801 = 99^2$ ,  $98+01=99$ .

**Критерии оценки.** За каждый найденный (любым способом) ответ начисляется минимум 1 балл. Верный в принципе ход решения – общая оценка минимум 4 балла.